LINEARE FUNKTIONALE AUF DER FELDALGEBRA UND IHRE ZERLEGUNG IN POSITIVE FUNKTIONALE

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Jakob Yngvason
aus Reykjavik, Island

Institut für Theoretische Physik

Göttingen 1973

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534922_0042

LINEARE FUNKTIONALE AUF DER FELDALGEBRA UND IHRE ZERLEGUNG IN POSITIVE FUNKTIONALE

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Jakob Yngvason
aus Reykjavik, Island

Institut für Theoretische Physik

Göttingen 1973

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

D 7
Referent: Professor Dr. H.-J. Borchers
Korreferent: Professor Dr. H. Reeh
Tag der mündlichen Prüfung: 15. Februar 1973

Gedruckt mit Unterstützung des Deutschen Akademischen Austauschdienstes.

Zusammenfassung

Es werden lineare Funktionale auf der Algebra der Testfunktionen für Feldoperatoren betrachtet. Durch Konstruktion einer Klasse von positiven Funktionalen wird gezeigt, daß jedes stetige lineare Funktional durch einen Vektor in dem Hilbertraum einer Darstellung der Algebra gegeben wird. Die Funktionale, die sich in eine Differenz von positiven Funktionalen zerlegen lassen, werden charakterisiert.
Durch ein Beispiel wird gezeigt, daß nicht alle positiven Funktionale auf einer Unteralgebra zu positiven Funktionalen auf der ganzen Algebra fortsetzbar sind.

1. Einleitung

In der axiomatischen Quantenfeldtheorie definieren die Wightmandistributionen ein positives Funktional auf einer Algebra von Testfunktionen während das Feld als die zugehörige Darstellung dieser Algebra $\underline{\mathcal{S}}$ aufgefaßt werden kann. In dieser algebraischen Formulierung [2] des Rekonstruktionstheorems [1] kommen die nichtlinearen Bedingungen der Wightmantheorie in einer natürlichen Weise zum Ausdruck. Nicht zuletzt deswegen sind die Eigenschaften der Feldalgebra $\underline{\mathcal{S}}$ und ihrer positiven Funktionale für diese Theorie von Bedeutung [2-7] .

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß es so viele positive Funktionale auf $\underline{\mathcal{S}}$ gibt, daß die zugehörigen Hilbertschen Normen die ursprüngliche Topologie auf der Algebra erzeugen. Die stetigen linearen Funktionale in dieser Topologie τ lassen sich jedoch nicht alle in positive Funktionale zerlegen. Dies hängt damit zusammen, daß die Multiplikation auf der Algebra nicht in beiden Variablen gemeinsam stetig ist. Wir definieren eine neue Topologie $\mathcal{N}$ als die feinste, so daß die Multiplikation eine stetige bilineare Abbildung $\underline{\mathcal{S}}[\tau] \times \underline{\mathcal{S}}[\tau] \to \underline{\mathcal{S}}[\mathcal{N}]$ ist und zeigen, daß der Dualraum $\underline{\mathcal{S}}[\mathcal{N}]'$ gerade aus den Funktionalen besteht, die man in der Form $(T_1-T_2)+i(T_3-T_4)$ mit positiven T_i's schreiben kann.

Zum Schluß wird der Frage nachgegangen, ob positive Funktionale auf einer Unteralgebra von $\underline{\mathcal{S}}$ eine Fortsetzung zu positiven Funktionalen auf $\underline{\mathcal{S}}$ besitzen. Es werden einfache Fälle betrachtet, wo die Funktionale fortsetzbar sind und es wird ein Beispiel gebracht, wo keine Fortsetzung eine Linearkombination von positiven Funktionalen ist.

2. Bezeichnungen und allgemeine Eigenschaften der Feldalgebra.

Wir fassen die Bezeichnungen und einige elementare Eigenschaften von $\underline{\mathcal{S}}$ zusammen. Für eine ausführlichere Diskussion und den Zusammenhang mit der Wightmantheorie siehe [2-6]. Eine Standardreferenz über topologische Vektorräume ist [8]. Nukleare Räume und topologische Tensorprodukte werden in [9,1o,11] behandelt, geordnete topologische Vektorräume in [12].

$\underline{\mathcal{S}}$ ist eine lokalkonvexe direkte Summe von nuklearen Frécheträumen: $\underline{\mathcal{S}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$, wobei $\mathcal{S}_o = \mathbb{C}$ und $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n\cdot r})$ der Raum der stark abfallenden $\mathcal{C}^\infty$ Funktionen $\mathbb{R}^{n\cdot r} \to \mathbb{C}$ mit der üblichen Schwarzschen Topologie ist. Daraus folgt insbesondere, daß $\underline{\mathcal{S}}$ ein LF-Raum ist, die Mackeytopologie $\tau(\underline{\mathcal{S}}, \underline{\mathcal{S}}')$ trägt, separabel, vollständig, nuklear, tonneliert, bornologisch, reflexiv und ein Montelraum ist. (Diese Aufzählung soll nur dem allgemeinen Überblick dienen, in dieser Arbeit werden nicht alle diese Eigenschaften eine Rolle spielen.)

Der Dualraum $\underline{\mathcal{S}}'$ mit der starken Topologie ist ein Produktraum: $\underline{\mathcal{S}}' = \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n'$, er ist vollständig und schwach folgenvollständig, nuklear, separabel und bornologisch.

Die Elemente aus $\underline{\mathcal{S}}$ sind also abbrechende Folgen $\underline{f} = (f_o, \ldots, f_n, o, \ldots)$ mit $f_\nu \in \mathcal{S}_\nu$, die Funktionale aus $\underline{\mathcal{S}}'$ unendliche Folgen $T = (T_o, T_1, \ldots)$ mit $T_\nu \in \mathcal{S}_\nu'$. Als Algebra ist $\underline{\mathcal{S}}$ die (vervollständigte) Tensoralgebra von $\mathcal{S}_1$, das Produkt ist definiert durch

$$(\underline{f} \times \underline{g})_n (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mu+\nu=n} f_\mu(x_1, \ldots, x_\mu)\, g_\nu(x_{\mu+1}, \ldots, x_n)$$

Das Einselement ist $1 = (1, o, o, \ldots)$.
Eine Involution $*$ ist gegeben durch

$$(\underline{f}^*)_n (x_1, \ldots, x_n) = \overline{f_n(x_n, \ldots, x_1)}.$$

Das Produkt ist stetig in jeder Variablen, auf beschränkten Mengen gemeinsam stetig. Die Involution ist ein Antiisomorphismus,

es gibt eine Basis von stetigen Normen p mit $p(\underline{f})=p(\underline{f}^*)$.
Der Hermitesche Teil von $\underline{\mathcal{S}}$

$$\underline{\mathcal{S}}_h = \{\underline{f}\in\underline{\mathcal{S}} \mid \underline{f}^*=\underline{f}\}$$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit dem Kegel der positiven Elemente

$$\underline{\mathcal{S}}^+ = \Big\{\underline{f}\in\underline{\mathcal{S}} \mid \underline{f}=\sum_{i=1}^{\infty} \underline{f}_i^*\times\underline{f}_i\ ,\ \underline{f}_i\in\underline{\mathcal{S}}\Big\}.$$

$\underline{\mathcal{S}}^+$ definiert eine Ordnungsrelation auf $\underline{\mathcal{S}}_h$: $\underline{f}\leqslant\underline{g}$ wenn $\underline{g}-\underline{f}\in\underline{\mathcal{S}}^+$.
Nach Wyss [6] ist jedes lineare Funktional, das auf $\underline{\mathcal{S}}^+$ positiv ist, automatisch stetig. Es muß jedoch bemerkt werden, daß Positivität auf $\underline{\mathcal{S}}^+$ mehr bedeutet, als Positivität auf Quadraten $\underline{f}^*\times\underline{f}$, falls keine Stetigkeit vorausgesetzt wird.

Der Dualraum $\underline{\mathcal{S}}_h'$ kann als der (reelle) Teilraum der reellen Funktionale in $\underline{\mathcal{S}}'$ aufgefaßt werden:

$$\underline{\mathcal{S}}_h' = \{T\in\underline{\mathcal{S}}' \mid T=T^*\}\ ,\ \text{wo}\ T^*(\underline{f}):=\overline{T(\underline{f}^*)}.$$

Wegen

$$\underline{\mathcal{S}}_h = \underline{\mathcal{S}}^+ - \underline{\mathcal{S}}^+ \qquad (1)$$

sind positive Funktionale reell. Sie bilden in $\underline{\mathcal{S}}_h'$ den dualen Kegel

$$\underline{\mathcal{S}}^{+\prime} = \{T\in\underline{\mathcal{S}}' \mid T(\underline{f})\geqslant 0\ ,\ \forall\,\underline{f}\in\underline{\mathcal{S}}^{+\prime}\}.$$

$\underline{\mathcal{S}}^{+\prime}$ ist ein Kegel (mit "Kegel" ist hier stets "spitzer Kegel" gemeint) wegen der zu (1) dualen Gleichung

$$\underline{\mathcal{S}}^{+\prime}\cap -\underline{\mathcal{S}}^{+\prime} = \{0\}.$$

Nach Borchers [4] ist $\underline{\mathcal{S}}^+$ abgeschlossen. Aus

$$\underline{\mathcal{S}}^+\cap -\underline{\mathcal{S}}^+ = \{0\}$$

folgt dann die duale Aussage [6]:

$\underline{\mathcal{S}}^{+\prime} - \underline{\mathcal{S}}^{+\prime}$ ist dicht in $\underline{\mathcal{S}}_h'$.

Schließlich kann jedes Element in Real- und Imaginärteil zerlegt werden:

$$\underline{f} = \frac{\underline{f}+\underline{f}^*}{2} + i\frac{\underline{f}-\underline{f}^*}{2i}\ ,\ T = \frac{T+T^*}{2} + i\,\frac{T-T^*}{2i}\ ,$$

also ist

$$\underline{\mathcal{S}} = \underline{\mathcal{S}}_h + i\,\underline{\mathcal{S}}_h\ ,\quad \underline{\mathcal{S}}' = \underline{\mathcal{S}}_h' + i\,\underline{\mathcal{S}}_h'.$$

Im Beweis von Satz 1 wird die Nuklearität der $\mathcal{S}_n$ ausgenutzt. Die Topologie von nuklearen Räumen kann stets durch Hilbertsche Seminormen definiert werden [9,10], im Falle von $\mathcal{S}_n$ können sogar Hilbertsche Normen gewählt werden [11]. Es seien h^μ bzw. h^ν Hilbertsche Normen auf $\mathcal{S}_\mu$ bzw. $\mathcal{S}_\nu$ mit zugehörigen Skalarprodukten $\langle , \rangle^\mu, \langle , \rangle^\nu$. Auf dem Tensorprodukt $\mathcal{S}_\mu \otimes \mathcal{S}_\nu$ definieren sie verschiedene Normen $h^\mu \otimes h^\nu$ mit der Eigenschaft

$$h^\mu \otimes h^\nu \,(f \otimes g) = h^\mu(f) \cdot h^\nu(g).$$

Die größte davon ist die Spurnorm

$$h^\mu \otimes_\pi h^\nu (u) = \operatorname{Inf} \Big\{ \sum_i h^\mu(f_i) h^\nu(g_i) \,\Big|\, \sum_i f_i \otimes g_i = u \Big\},$$

denn für jede Norm $h^\mu \otimes h^\nu$ mit der genannten Eigenschaft gilt

$$h^\mu \otimes h^\nu \Big(\sum_i f_i \otimes g_i \Big) \leqslant \sum_i h^\mu \otimes h^\nu (f_i \otimes g_i) = \sum_i h^\mu(f_i) h^\nu(g_i).$$

Insbesondere ist $h^\mu \otimes_\pi h^\nu$ größer als die Hilbert-Schmidt-Norm

$$h^\mu \otimes_\sigma h^\nu \Big(\sum_i f_i \otimes g_i \Big) = \Big(\sum_{i,j} \langle f_i, f_j \rangle^\mu \langle g_i, g_j \rangle^\nu \Big)^{1/2},$$

diese wiederum größer als die gewöhnliche Operatornorm

$$h^\mu \otimes_\varepsilon h^\nu (u) = \sup_{\substack{T \in \mathcal{S}'_\mu,\ S \in \mathcal{S}'_\nu \\ |T| \leqslant h^\mu,\ |S| \leqslant h^\nu}} |T \otimes S\,(u)|.$$

(Das Tensorprodukt von zwei Hilberträumen $H_1 \otimes H_2$ kann als ein Raum von linearen Operatoren $H_2 \to H_1$ aufgefaßt werden.) Die Produkte $\otimes_\pi$ und $\otimes_\varepsilon$ können natürlich von beliebigen Seminormen gebildet werden [9,10].

Die Nuklearität impliziert nun, daß es nicht darauf ankommt, welches von diesen Produkten benutzt wird [9,10]:

Für feste Normen h^μ, h^ν sind sie zwar nicht gleich:

$$h^\mu \otimes_\varepsilon h^\nu \leqslant h^\mu \otimes_\sigma h^\nu \leqslant h^\mu \otimes_\pi h^\nu,$$

aber zu h^μ, h^ν gibt es stets andere stetige Hilbertsche Normen k^μ, k^ν mit

$$h^\mu \otimes_\pi h^\nu \leqslant k^\mu \otimes_\varepsilon k^\nu \leqslant k^\mu \otimes_\sigma k^\nu.$$

Die Normsysteme $\{h^{\mu}\otimes_{\pi}h^{\nu}\}$, $\{h^{\mu}\otimes_{\sigma}h^{\nu}\}$ und $\{h^{\mu}\otimes_{\varepsilon}h^{\nu}\}$, wo μ, ν vollständige Systeme von stetigen Normen durchlaufen, definieren deshalb alle dieselbe Topologie auf $\mathcal{S}_{\mu}\otimes\mathcal{S}_{\nu}$. Die Vervollständigung $\mathcal{S}_{\mu}\hat{\otimes}\mathcal{S}_{\nu}$ ist topologisch isomorph zu $\mathcal{S}_{\mu+\nu}$ [o]. Insbesondere kann die Topologie auf $\mathcal{S}_n$ durch ein System von Hilbertschen Normen der Gestalt

$$h^1\otimes_{\sigma}\cdots\otimes_{\sigma}h^1$$

mit Hilbertschen Normen h^1 auf $\mathcal{S}_1$ definiert werden.

Als schwach stetige $*$-Darstellung von $\underline{\mathcal{S}}$ bezeichnen wir eine Abbildung der Algebra auf lineare Operatoren $A(\underline{f})$ mit einem gemeinsamen dichten Definitionsbereich D in einem Hilbertraum, so daß

(i) $A(\underline{f})D\subset D$ für alle $\underline{f}\in\underline{\mathcal{S}}$

(ii) $A(\alpha\cdot\underline{f}+\beta\cdot\underline{g}) = \alpha A(\underline{f}) + \beta A(\underline{g})$

$A(\underline{f}\times\underline{g}) = A(\underline{f})\cdot A(\underline{g})$

$A(\underline{f}^*) = A(\underline{f})^*$ auf D

(iii) $\langle\varphi, A(\underline{f})\psi\rangle$ ist stetig in $\underline{f}$ für alle $\varphi,\psi\in D$.

Lemma 1: Jede schwach stetige $*$-Darstellung von $\underline{\mathcal{S}}$ ist stark stetig, d.h. $\underline{f}\mapsto\|A(\underline{f})\varphi\|$ ist stetig für alle $\varphi\in D$.

Beweis: $\|A(\underline{f})\varphi\|^2 = \langle\varphi, A(\underline{f}^*\times\underline{f})\varphi\rangle \leq$

$$\leq \sum_{\mu,\nu} |\langle\varphi, A(f_{\mu}^*\times f_{\nu})\varphi\rangle| = \sum_{\mu,\nu} |\langle A(f_{\mu})\psi, A(f_{\nu})\psi\rangle| \leq$$

$$\leq \sum_{\mu,\nu} \|A(f_{\mu})\varphi\|\,\|A(f_{\nu})\varphi\| = \sum_{\mu,\nu} \langle\varphi, A(f_{\mu}^*\times f_{\mu})\varphi\rangle^{1/2}\langle\varphi, A(f_{\nu}^*\times f_{\nu})\varphi\rangle^{1/2}$$

Wegen der schwachen Stetigkeit gibt es stetige Normen p_{2n} auf $\mathcal{S}_{2n}$ mit $|\langle\varphi, A(f_n^*\times f_n)\varphi\rangle| \leq p_{2n}(f_n^*\times f_n)$. Weil $\mathcal{S}_{2n} = \mathcal{S}_n\hat{\otimes}\mathcal{S}_n$ können diese Normen von der Form $p_{2n} = q_n\otimes_{\pi}q_n$ gewählt werden mit stetigen Normen q_n auf $\mathcal{S}_n$. Die Bedingung $q_n(f_n) = q_n(f_n^*)$ bedeutet auch keine Einschränkung. Es folgt

$$\|A(\underline{f})\varphi\| \leq \Big(\sum_{\mu,\nu} q_{\mu}(f_{\mu})\,q_{\nu}(f_{\nu})\Big)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(f_n) =: q(\underline{f})$$

und q ist eine stetige Norm auf $\underline{\mathcal{S}}$. ∎

Stetige $*$-Darstellungen werden im Folgenden kurz "Darstellungen" genannt.
Ist $\mathcal{H}$, D, A eine Darstellung, so ist $T(\underline{f}) = \langle \Omega, A(\underline{f})\Omega \rangle$ ein positives Funktional auf $\underline{\mathcal{S}}$ für alle $\Omega \in D$. Umgekehrt definiert jedes positive Funktional T über die GNS-Konstruktion eine zyklische Darstellung mit zyklischem Vektor Ω, Definitionsbereich $D_o = \{ A(\underline{f})\Omega \mid \underline{f} \in \underline{\mathcal{S}} \}$ und $\| A(\underline{f})\Omega \| = T(\underline{f}^* \times \underline{f})^{1/2}$.

3. Eine Klasse von positiven Funktionalen.

Ein positives Funktional T definiert eine Hilbertsche Seminorm $n(\underline{f}) = T(\underline{f}^* \times \underline{f})^{1/2}$ auf $\underline{\mathcal{S}}$. Es soll nun gezeigt werden, daß die von der Gesamtheit dieser Seminorm erzeugte Topologie gleich der ursprünglichen Topologie ist. Wegen Lemma 1 ist sie auf jeden Fall gröber. Die umgekehrte Richtung ergibt sich aus dem gleich folgenden Satz. Die Beweismethode ist die Verallgemeinerung einer Konstruktion von Boas [13] für die Algebra der Polynome in einer Unbestimmten (d.h. die Tensoralgebra von $\mathbb{C}$). Vergleiche auch Lemma 2 in [7].

Satz 1: Zu jeder stetigen Seminorm p auf $\underline{\mathcal{S}}$ gibt es ein positives Funktional T mit

$$p(\underline{f})^2 \leqslant T(\underline{f}^* \times \underline{f}) \quad \text{für alle } \underline{f} \in \underline{\mathcal{S}}.$$

Beweis: Die Topologie von $\mathcal{S}_1$ kann durch Hilbertsche Normen definiert werden. Ein vollständiges System von Normen bilden z.B. [11]:

$$h_K(f) = \Big(\sum_{\substack{|\alpha| \leqslant K \\ \alpha \leqslant K}} \int (1+|x|^2)^{\alpha} \, |D^{\alpha} f(x)|^2 \, dx \Big)^{1/2}.$$

Dies kann auch in der Form

$$h_K(f) = \langle f, M_K f \rangle_o^{1/2}$$

geschrieben werden, wo $\langle f,g \rangle_o = \int \overline{f(x)} g(x)\, dx$ das L_2-Skalarprodukt ist und

$$M_K = \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant K \\ \alpha \leqslant K}} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} (1+|x|^2)^{\alpha} D^{\alpha}.$$

M_K ist ein stetiger linearer Operator $\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_1$, positiv bezüglich des Skalarproduktes $\langle \, , \, \rangle_o$. Das zu h_K gehörende Skalarprodukt $\langle f, M_K g \rangle_o$ wollen wir mit $\langle f,g \rangle_K$ bezeichnen.

Auf $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \mathcal{S}_1$ bilden entsprechend die Hilbertschen Normen

$$\ldots = n_K \otimes \ldots \otimes n_K$$

ein vollständiges System. Die zugehörigen Skalarprodukte sind

$$\langle f, g\rangle_k^n = \langle f, M_k^n\, g\rangle_o^n$$

mit $M_k^n = M_k \otimes \ldots \otimes M_k$.

Die Topologie von $\mathcal{S}$ kann ebenfalls durch Hilbertsche Normen definiert werden, nämlich Normen der Gestalt

$$p(\underline{f}) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} p_n(f_n)^2\Big)^{1/2}$$

wobei p_n Hilbertsche Normen auf $\mathcal{S}_n$ sind. (Ursprünglich war die Topologie durch Normen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(f_n)$ definiert. Das System aller solcher Normen ist aber äquivalent zu den angegebenen Hilbertschen Normen, vgl. etwa Lemma 2 in [7] .) Man kann deshalb annehmen, daß die gegebene stetige Seminorm p diese Form hat.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen sollen nun Hilbertsche Normen $q_n = c_n \cdot h_{k_n}^n$ und Funktionale $T_{2n} \in \mathcal{S}'_{2n}$ durch Induktion nach n so konstruiert werden, daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(i) $q(\underline{f}) \geq p(\underline{f})$ für alle $\underline{f}=(f_o,\ldots,f_n)$, $q(\underline{f}) := \Big(\sum_{\nu=o}^{n} q_\nu(f_\nu)^2\Big)^{1/2}$.

(ii) Es gibt ein $\varepsilon_n > 0$ so daß $T(\underline{f}^* \times \underline{f}) \geq (1+\varepsilon_n)\cdot q(\underline{f})^2$

für $\underline{f} = (f_o,\ldots,f_n)$, $T = (T_o, 0, T_2, \ldots, 0, T_{2n})$.

(iii) Es existieren stetige Seminormen $q_{\mu+\nu,\nu}$ auf $\mathcal{S}_\nu$ für $0 \leq \mu < \nu \leq 2n$, $\mu+\nu \leq 2n$, so daß

$|T_{\mu+\nu}(f_\mu^* \times g_\nu)| \leq q_\mu(f_\mu)\cdot q_{\mu+\nu,\nu}(g_\nu)$

für alle $f_\mu \in \mathcal{S}_\mu$, $g_\nu \in \mathcal{S}_\nu$. Dabei sei $T_{2m+1} = 0$ definiert.

Die Konstruktion fängt bei n = 0 an: p_o ist eine stetige Norm auf $\mathbb{C}$, also gibt es ein $c_o > 0$ mit $p_o(a) \leq c_o \cdot |a| =: q_o(a)$. Definiere $T_o = 2c_o^2$, $\varepsilon_o = 1$. Dann sind (i), (ii) und (iii) erfüllt. Wir nehmen nun an, daß diese Bedingungen gelten mit n-1 statt n. Wähle $q_n = c_n \cdot h_{k_n}^n$ so, daß

$$q_n \geq \max\{h_o^n, p_n, q_{n,n}, q_{n+1,n}, \ldots q_{2(n-1),n}\}. \qquad (2)$$

Dann ist (i) erfüllt. Wir setzen $T_{2n-1} = 0$ und definieren auf $\mathcal{S}_n \otimes \mathcal{S}_n$:

$$T_{2n}\left(\sum_i f_n^i \times g_n^i\right) = \lambda_{2n} \cdot c_n^2 \sum_i \langle f_n^{i*}, g_n^i \rangle_{K_n}^n$$

mit einer noch zu bestimmenden Konstanten λ_{2n}.
Es ist

$$|T_{2n}(f)| \leqslant \text{const} \cdot h_{K_n}^n \otimes_\pi h_{K_n}^n(f),$$

also definiert dies ein stetiges Funktional auf $\mathcal{S}_{2n} = \mathcal{S}_n \hat{\otimes} \mathcal{S}_n$.
Wir wollen nun λ_{2n} so bestimmen, daß (ii) erfüllt ist.
Sei $\underline{f} = (f_0, \ldots, f_n)$, $\hat{\underline{f}} := (f_0, \ldots f_{n-1})$, also $\underline{f} = (\hat{\underline{f}}, f_n)$.
Es ist

$$T(\underline{f}^* \times \underline{f}) = T(\hat{\underline{f}}^* \times \hat{\underline{f}}) + 2\,\mathrm{Re}\, T(\hat{\underline{f}}^* \times f_n) + T(f_n^* \times f_n).$$

Der gemischte Term kann wegen (iii) und (2) abgeschätzt werden:

$$|T(\hat{\underline{f}}^* \times f_n)| \leqslant \sum_{\mu=0}^{n-1} |T_{\mu+n}(f_\mu^* \times f_n)| \leqslant \sum_{\mu=0}^{n-1} q_\mu(f_\mu) \cdot q_{\mu+n,n}(f_n) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\mu=0}^{n-1} q_\mu(f_\mu)\right) \cdot q_n(f_n) \leqslant n \cdot q(\hat{\underline{f}}) \cdot q_n(f_n).$$

Nach (ii) ist $T(\hat{\underline{f}}^* \times \hat{\underline{f}}) \geqslant (1+\varepsilon_{n-1}) \cdot q(\hat{\underline{f}})^2$ mit $\varepsilon_{n-1} > 0$.

Setze $\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}/2$. Nach Definition ist $T(f_n^* \times f_n) = \lambda_{2n} \cdot q_n(f_n)^2$ und $q(\underline{f})^2 = q(\hat{\underline{f}})^2 + q_n(f_n)^2$. Also gilt

$$T(\underline{f}^* \times \underline{f}) - (1+\varepsilon_n) \cdot q(\underline{f})^2 \geqslant (1+2\varepsilon_n) \cdot q(\hat{\underline{f}})^2 - 2n q(\hat{\underline{f}}) q_n(f_n) +$$
$$+ \lambda_{2n} \cdot q_n(f_n)^2 - (1+\varepsilon_n) q(\hat{\underline{f}})^2 - (1+\varepsilon_n) q_n(f_n)^2 =$$
$$= \varepsilon_n\, q(\hat{\underline{f}})^2 - 2n q(\hat{\underline{f}}) \cdot q_n(f_n) + (\lambda_{2n} - 1 - \varepsilon_n) \cdot q_n(f_n)^2 \geqslant 0$$
$$\text{falls } \lambda_{2n} \geqslant \frac{n^2}{\varepsilon_n} + 1 + \varepsilon_n.$$

Es muß noch nachgeprüft werden, ob das konstruierte T die Bedingung (iii) erfüllt. Für $\mu+\nu \leqslant 2(n-1)$ gilt sie nach Induktionsvoraussetzung und für $\mu+\nu = 2n-1$ wegen $T_{2n-1} = 0$. Also sind stetige Seminormen $q_{2n,\nu}$ für $\nu = n+1, \ldots, 2n$ so zu bestimmen, daß

$$|T_{2n}(f_\mu^* \times g_\nu)| \leqslant q_\mu(f_\mu) \cdot q_{2n,\nu}(g_\nu)$$

für $\mu+\nu = 2n$, ν wie oben.

Nach Definition ist

$$T_{2n}(f_n \times g_n) = \text{const.} \langle f_n^*, M_{k_n}^n g_n \rangle_o^n$$

also wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für $\langle , \rangle_o^n$

$$|T_{2n}(f_n \times g_n)| \leq h_o^n(f_n) \cdot r^n(g_n) ,$$

wobei $r^n(g) := \text{const} \cdot h_o^n(M_{k_n}^n g)$ eine stetige Seminorm auf $\mathcal{S}_n$ ist.

Dies impliziert

$$|T_{2n}| \leq h_o^n \otimes_\pi r^n .$$

Sei nun $\mu = 2n-\nu \leq n-1$. Es ist

$$h_o^n = h_o^\mu \otimes_\sigma h_o^{n-\mu} \leq h_o^\mu \otimes_\pi h_o^{n-\mu}$$

also

$$|T_{2n}| \leq (h_o^\mu \otimes_\pi h_o^{n-\mu}) \otimes_\pi r^n =$$

$$= h_o^\mu \otimes_\pi (h_o^{n-\mu} \otimes_\pi r^n) \leq q_\mu \otimes_\pi q_{2n,\nu}$$

wo $q_{2n,\nu} := h_o^{n-\mu} \otimes_\pi r^n$ eine stetige Seminorm auf $\mathcal{S}_\nu = \mathcal{S}_{n-\mu} \hat{\otimes} \mathcal{S}_n$ ist. ∎

Eine unmittelbare Folgerung aus diesem Satz ist

Satz 2: Zu jedem stetigen Funktional $S \in \underline{\mathcal{S}}'$ gibt es eine zyklische Darstellung $\mathcal{H}$, A, Ω von $\underline{\mathcal{S}}$ und einen Vektor $\varphi \in \mathcal{H}$ so daß

$$S(\underline{f}) = \langle \varphi, A(\underline{f})\Omega \rangle .$$

Beweis: Zu S gibt es ein $T \in \underline{\mathcal{S}}^{+\prime}$ mit

$$|S(\underline{f})| \leq T(\underline{f}^* \times \underline{f})^{1/2} .$$

Zu T gehört eine zyklische Darstellung $\mathcal{H}, A, \Omega$ von $\underline{\mathcal{S}}$ mit zyklischem Vektor Ω. Auf der dichten Menge $D_o = \{ A(\underline{f})\Omega \mid \underline{f} \in \underline{\mathcal{S}} \}$ definiert S ein lineares Funktional

$$l(A(\underline{f})\Omega) := S(\underline{f}),$$

das wegen $|S(\underline{f})| \leq T(\underline{f}^* \times \underline{f})^{1/2} = \| A(\underline{f})\Omega \|$ stetig ist. Es kann also auf $\mathcal{H}$ stetig erweitert werden und ist gegeben durch einen Vektor $\varphi \in \mathcal{H}$:

$$l(\psi) = \langle \varphi, \psi \rangle \qquad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Insbesondere ist $S(\underline{f}) = \langle \varphi, A(\underline{f})\Omega \rangle$. ∎

4. Zerlegung von linearen Funktionalen.

Wie bereits erwähnt wurde, ist jedes lineare Funktional, das auf $\underline{\mathcal{S}}^+$ positiv ist, stetig in der Topologie τ. Lemma 1 impliziert nun, daß positive Funktionale und Linearkombinationen von solchen eine weitere Stetigkeitseigenschaft haben, die jetzt behandelt werden soll.

Lemma 2: Zu jedem $T \in \underline{\mathcal{S}}^{+1}$ gibt es eine stetige Norm p auf $\underline{\mathcal{S}}$ so daß

$$|T(\underline{f}^* \times \underline{g})| \leq p(\underline{f}) \cdot p(\underline{g}) \qquad (3)$$

d.h. T definiert eine stetige Sesquilinearform

$$(\underline{f}, \underline{g}) \mapsto T(\underline{f}^* \times \underline{g}).$$

Beweis: Nach Lemma 1 gibt es ein p mit $T(\underline{f}^* \times \underline{f})^{1/2} \leq p(\underline{f})$. Daraus folgt (3) wegen der Chauchy-Schwarzschen Ungleichung. ∎

Sind T_1 und T_2 positive Funktionale, so gilt Lemma 2 auch für $T_1 - T_2$, da $|T_1 - T_2| \leq |T_1| + |T_2|$. Wir geben nun ein stetiges Funktional $T \in \underline{\mathcal{S}}'_h$an, das (3) nicht erfüllt. Der Einfachheit halber sei $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$, für $\mathcal{S}(\mathbb{R}^r)$geht es analog.

Ein Beispiel:

Sei $T = (T_o, T_1, T_2 \ldots)$ definiert durch

$$T_o := 1$$

$$T_n := \delta^{(n)} \otimes \ldots \otimes \delta^{(n)} \quad \text{(n-te Ableitung der } \delta\text{-Funktion in jeder Variablen).}$$

Sei $\underline{f} = (0, f_1)$, $\underline{g} = (0, \ldots, 0, g_N)$. Es ist $|T(\underline{f}^* \times \underline{g})| = |T_{N+1}(f_1^* \times g_N)$

$$\left| f_1^{(N+1)}(0) \cdot g_N^{(N+1),\ldots,N+1)}_{(0,\ldots,0)} \right|.$$

Sei $\{ g_N \}$, N=1,2,... eine Folge mit $g_N^{(N+1;\ldots;N+1)}(0,\ldots,0) \neq 0$ für alle N. Angenommen es gilt (3). Dann ist

$$|f_1^{(N+1)}(0)| \leq p_1(f_1) \cdot c_N$$

mit $c_N = \frac{P_N(g_N)}{g_N^{(N+1\dots N+1)}(0,\dots,0)}$. Da nicht beliebig hohe Ableitungen

durch eine einzige stetige Norm abgeschätzt werden können, ist dies nicht für alle N und f möglich.
Aus diesem Beispiel folgt

Lemma 3: $\underline{\mathcal{S}}^{+1} - \underline{\mathcal{S}}^{+1} \neq \underline{\mathcal{S}}^{1}_{h}$

und

Lemma 4: Das Produkt $\underline{f} \times \underline{g}$ ist nicht stetig in beiden Variablen gemeinsam.

Beweis: Andernfalls wäre $(\underline{f},\underline{g}) \mapsto T(\underline{f}^* \times \underline{g})$ stetig als Verknüpfung von stetigen Abbildungen. ∎

Bezeichnung: Mit $\mathcal{N}$ werde die feinste lokalkonvexe Topologie auf $\underline{\mathcal{S}}$ bezeichnet bezüglich der das Produkt als bilineare Abbildung

$$m: \underline{\mathcal{S}}[\tau] \times \underline{\mathcal{S}}[\tau] \to \underline{\mathcal{S}}[\mathcal{N}]$$

in beiden Variablen gemeinsam stetig ist.

Da $\underline{\mathcal{S}}$ ein Einselement hat, ist m surjektiv und $\mathcal{N}$ existiert. Eine absolutkonvexe Menge $U \subset \underline{\mathcal{S}}$ ist genau dann eine Nullumgebung, wenn $m^{-1}(U)$ eine Nullumgebung in $\underline{\mathcal{S}}[\tau] \times \underline{\mathcal{S}}[\tau]$ ist.
Diese Topologie hat gerade die Eigenschaft, daß eine lineare Abbildung L von $\underline{\mathcal{S}}[\mathcal{N}]$ in einen konvexen Raum E genau dann stetig ist, wenn $L \circ m$ eine stetige bilineare Abbildung $\underline{\mathcal{S}}[\tau] \times \underline{\mathcal{S}}[\tau] \to E$ ist. Als stetige bilineare Abbildung definiert m eine stetige lineare Abbildung

$$\phi : \underline{\mathcal{S}}[\tau] \otimes_{\pi} \underline{\mathcal{S}}[\tau] \to \underline{\mathcal{S}}[\mathcal{N}]$$

und $\mathcal{N}$ ist auch die feinste Topologie, so daß ϕ stetig ist.
$\underline{\mathcal{S}}[\mathcal{N}]$ ist daher isomorph zu dem Quotientenraum

$$\underline{\mathcal{S}}[\tau] \otimes_{\pi} \underline{\mathcal{S}}[\tau] \Big/ \operatorname{Ker} \phi \ .$$

Explizit ist $\mathcal{N}$ gegeben durch die (Semi)normen

$$\hat{p}(\underline{f}) = \mathrm{Inf}\left\{ \sum_i p(\underline{g}^i) p(\underline{h}^i) \,\middle|\, \sum_i \underline{g}^i \times \underline{h}^i = \underline{f} \right\} \qquad (4)$$

wo p eine Basis von τ-stetigen (Semi)normen durchläuft. Dabei ist es gleich, ob das Infimum über Zerlegungen von $\underline{f}$ in endlich viele oder unendlich viele Produkte genommen wird, denn jeder unendlichen Zerlegung entsprechen endliche Zerlegungen:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \underline{g}^i \times \underline{h}^i = \sum_{i=1}^{N} \underline{g}^i \times \underline{h}^i + \Big(\sum_{i=N+1}^{\infty} \underline{g}^i \times \underline{h}^i \Big) \times 1$$

und der letzte Term wird beliebig klein für $N \to \infty$ falls $\sum_{i=1}^{\infty} \underline{g}^i \times \underline{h}^i$ konvergiert.

Wegen $$\hat{p}(\underline{f}) \leq p(1) \cdot p(\underline{f}) \qquad (5)$$

ist $\mathcal{N}$ gröber als τ, wegen Lemma 4 echt gröber.

Erfüllt ein lineares Funktional (3) mit $p(\underline{f}) = p(\underline{f}^*)$, so gilt offenbar

$$|T| \leq \hat{p} \qquad (6)$$

und umgekehrt impliziert (6) wieder (3).

Insbesondere sind positive Funktionale und Linearkombinationen von solchen $\mathcal{N}$-stetig. Wir werden gleich sehen, daß Satz 1 die umgekehrte Aussage impliziert: Jedes $\mathcal{N}$-stetige Funktional S läßt sich als $(T_1 - T_2) + i\,(T_3 - T_4)$ mit $T_i \in \underline{\mathcal{G}}^{+1}$ schreiben. Aus dem Satz folgt sogar etwas mehr, nämlich, daß die positiven Funktionale T_i aus einer gleichstetigen Menge gewählt werden können, wenn S eine gleichstetige Menge durchläuft. (Eine Menge von Funktionalen C heißt gleichstetig, wenn es eine stetige Seminorm $\hat{p}$ gibt mit $|T| \leq \hat{p}$ für alle $T \in C$.) Eine solche Beziehung zwischen Ordnung und Topologie hat eine besondere Bezeichnung [12]:

Definition: Ein Kegel K in einem topologischen Vektorraum heißt normal, wenn es eine Basis von Nullumgebungen U gibt mit $(U + K) \cap (U - K) = U$.

Satz 3 (Schaefer): Es sei E ein reeller topologischer Vektorraum mit einem Kegel K und dualem Kegel $K' \subset E'$. K ist genau dann normal, wenn jede gleichstetige Menge $C \subset E'$ als $C_1 - C_1$

mit einer gleichstetigen Menge $C_1 \subset K'$ darstellbar ist.

Für den Beweis siehe [12] Prop. 1.22, S. 73.

Die angekündigte Folgerung aus Satz 1 ist nun

Satz 4: $\underline{\mathcal{S}}^+$ ist ein normaler Kegel in $\underline{\mathcal{S}}_h[\mathcal{N}]$.

Beweis: Sei $C \subset \underline{\mathcal{S}}_h[\mathcal{N}]'$ eine gleichstetige Menge. Dann gibt es eine τ-Norm p, so daß $|S| \leq \hat{p}$ für alle $S \in C$. Zu p gibt es nach Satz 1 ein $T \in \underline{\mathcal{S}}^{+\prime}$ mit $T(\underline{f}^* \times \underline{f}) \geq p(\underline{f})^2$ und zu T nach Lemma 2 ein q mit $|T| \leq \hat{q}$. Es ist $S = (S+T) - T$ und $(S+T)(\underline{f}^* \times \underline{f}) \geq$ $\geq T(\underline{f}^* \times \underline{f}) - |S(\underline{f}^* \times \underline{f})| \geq p(\underline{f})^2 - p(\underline{f})^2 = 0$. Also ist $S+T \in \underline{\mathcal{S}}^{+\prime}$. $S+T$ und T liegen beide in der gleichstetigen Menge $\{R \mid |R| \leq \hat{p}+\hat{q}\}$. $\underline{\mathcal{S}}^+$ ist also normal nach Satz 3. ∎

Mit diesen Überlegungen können wir die Funktionale in $\underline{\mathcal{S}}^{+\prime} - \underline{\mathcal{S}}^{+\prime}$ charakterisieren:

Satz 5: Für ein reelles lineares Funktional S auf $\underline{\mathcal{S}}$ ist äquivalent:

(i) $S \in \underline{\mathcal{S}}^{+\prime} - \underline{\mathcal{S}}^{+\prime}$

(ii) S ist $\mathcal{N}$-stetig

(iii) $(\underline{f}, \underline{g}) \to S(\underline{f}^* \times \underline{g})$ ist eine stetige Sesquilinearform

(iv) Es gibt eine zyklische Darstellung $\mathcal{H}, A, \Omega$ von $\underline{\mathcal{S}}$ und einen beschränkten Hermiteschen Operator M, der mit der Darstellung schwach kommutiert (d.h. $\langle \varphi, MA(\underline{g})\psi \rangle = \langle A(\underline{g}^*)\varphi, M\psi \rangle$ für alle $\varphi, \psi \in D_0 = \{A(\underline{f})\Omega\}$) so daß $S(\underline{f}) = \langle M\Omega, A(\underline{f})\Omega \rangle$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (iii) nach Lemma 2, (ii) $\Rightarrow$ (i) nach Satz 4 und Satz 3. (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) folgt unmittelbar aus der Definition von $\mathcal{N}$ und der Tatsache, daß die Involution $*$ ein Antiisomorphismus ist.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): $|S(\underline{f}^* \times \underline{g})| \leq |\langle M\Omega, A(\underline{f}^* \times \underline{g})\Omega\rangle| =$

$= |\langle A(\underline{f})\Omega, M\, A(\underline{g})\Omega\rangle| \leq \|A(\underline{f})\Omega\| \cdot \|M\| \cdot \|A(\underline{g})\Omega\| \leq$

$\leq \|M\|^{1/2} \cdot p(\underline{f}) \cdot \|M\|^{1/2}\, p(\underline{g})$ nach Lemma 1.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Sei $|S(\underline{f}^* \times \underline{g})| \leq p(\underline{f}) \cdot p(\underline{g})$. Nach Satz 1 gibt es ein $T \in \underline{\mathcal{S}}^{+1}$ mit $p(\underline{f})^2 \leq T(\underline{f}^* \times \underline{f})$. T definiert eine zyklische Darstellung $\mathcal{H}, A, \Omega$. Definiere eine Sesquilinearform B auf D_0:

$$B(A(\underline{f})\Omega, A(\underline{g})\Omega) := S(\underline{f}^* \times \underline{g}).$$

Es ist $|B(\Phi,\Psi)| \leq \|\Phi\| \cdot \|\Psi\|$ für $\Phi, \Psi \in D_0$ und D_0 ist dicht in $\mathcal{H}$, also definiert B eine stetige Sesquilinearform auf $\mathcal{H}$ und ist deshalb gegeben durch einen beschränkten Operator M. Weil S reell, ist M Hermitesch. M kommutiert schwach mit der Darstellung wegen

$$S(\underline{f}^* \times (\underline{g} \times \underline{h})) = S((\underline{g}^* \times \underline{f})^* \times \underline{h}). \blacksquare$$

Die Topologie $\mathcal{N}$ hat gegenüber τ den Vorteil, daß sie den positiven Funktionalen und der Ordnungsstruktur besser angepaßt ist. Die allgemeinen Eigenschaften von $\mathcal{N}$ werden im folgenden Satz zusammengestellt:

Satz 6:

(i) $\underline{\mathcal{S}}[\mathcal{N}]$ ist ein Hausdorffscher lokalkonvexer Raum mit dem Dualraum $\underline{\mathcal{S}}[\mathcal{N}]' = (\underline{\mathcal{S}}^{+1} - \underline{\mathcal{S}}^{+1}) + i(\underline{\mathcal{S}}^{+1} - \underline{\mathcal{S}}^{+1})$.
Es gibt eine Basis von stetigen Normen ν mit der Eigenschaft, daß $0 \leq \underline{f} \leq \underline{g}$ impliziert $\nu(\underline{f}) \leq \nu(\underline{g})$.

(ii) $\mathcal{N}$ ist echt gröber als τ, aber für alle $N < \infty$ stimmen $\mathcal{N}$ und τ auf $\bigoplus_{n=0}^{N} \mathcal{S}_n$ überein.

(iii) Sei $Q_N \underline{f} := (f_0, \ldots, f_N)$. Falls $\mathcal{M} \subset \underline{\mathcal{S}}$ eine Teilmenge mit $Q_N \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ für alle N ist, so ist der Abschluß von $\mathcal{M}$ in beiden Topologien $\mathcal{N}$ und τ derselbe.

(iv) Die beschränkten Mengen in $\underline{\mathcal{S}}[\mathcal{N}]$ und $\underline{\mathcal{S}}[\tau]$ sind dieselben.

(v) $\underline{\mathcal{S}}[\mathcal{N}]$ ist nuklear und vollständig, aber weder bornologisch noch tonneliert.

Für den Beweis brauchen wir ein Lemma über die Seminormen $\hat{p}$:

Lemma 5: (i) Sei p eine Seminorm von der Form

$$p(\underline{f}) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(f_n).$$

Dann ist

$$\hat{p}(\underline{f}) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(f_n)$$

mit

$$q_n(f_n) = \operatorname{Inf}\left\{ \sum_{\mu+\nu=n} P_\mu \otimes_\pi P_\nu(f_{\mu\nu}) \,\middle|\, \sum_{\mu+\nu=n} f_{\mu\nu} = f_n \right\}$$

(ii) Sei speziell $p_o(a) = |a|$, p_1 eine Seminorm auf $\mathcal{S}_1$, $P_n = p_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi p_1$, $\alpha_n > 0$ und

$$p_{\{\alpha_n\}}(\underline{f}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n p_n(f_n).$$

Dann ist

$$p_{\{\beta_n\}} \leq \hat{p}_{\{\alpha_n\}} \leq \alpha_o \cdot p_{\{\alpha_n\}} \tag{7}$$

falls

$$\beta_n \leq \min_{\mu+\nu=n} \{\alpha_\mu \cdot \alpha_\nu\}.$$

Beweis: Sei $f_n = \sum_{\mu+\nu=n} f_{\mu\nu}$. Es ist $\mathcal{S}_{\mu+\nu} = \mathcal{S}_\mu \hat{\otimes} \mathcal{S}_\nu$, also hat jedes $f_{\mu\nu}$ eine Zerlegung: $f_{\mu\nu} = \sum_i g^i_{\mu+\nu,\mu} \times h^i_{\mu+\nu,\nu}$ mit $g^i_{\mu+\nu,\mu} \in \mathcal{S}_\mu$, $h^i_{\mu+\nu,\nu} \in \mathcal{S}_\nu$. Nach Definition von $p_\mu \otimes_\pi p_\nu$ ist

$$P_\mu \otimes_\pi P_\nu(f_{\mu\nu}) = \operatorname{Inf}\left\{ \sum_i P_\mu(g^i_{\mu+\nu,\mu}) \cdot P_\nu(h^i_{\mu+\nu,\nu}) \,\middle|\, f_{\mu\nu} = \sum_i g^i_{\mu+\nu,\mu} \times h^i_{\mu+\nu,\nu} \right\}$$

Jede Zerlegung von $f_{\mu\nu}$ führt zu einer Zerlegung von $\underline{f}$:

$$\underline{f} = \sum_i \sum_{\mu\nu} g^i_{\mu+\nu,\mu} \times h^i_{\mu+\nu,\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu+\nu=n} \sum_i g^i_{n,\mu} \times h^i_{n,\nu}$$

und aus der Definition (4) von $\hat{p}$ folgt

$$\hat{p}(\underline{f}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu+\nu=n} \sum_i P_\mu(g^i_{n,\mu}) P_\nu(h^i_{n,\nu}).$$

Bildet man rechts das Infimum über die Zerlegung von f_n in $f_{\mu\nu}$ und die Zerlegungen von $f_{\mu\nu}$ in $g^i_{\mu+\nu,\mu} \times h^i_{\mu+\nu,\nu}$ erhält man

$$\hat{p}(\underline{f}) \leqslant \sum q_n(f_n).$$

Es sei umgekehrt $\underline{f} = \sum \underline{g}^i \times \underline{h}^i$, also $f_n = \sum_{\mu+\nu=n} \sum_i g^i_\mu \times h^i_\nu$. Setze $f_{\mu\nu} = \sum_i g^i_\mu \times h^i_\nu$. Es ist

$$\sum_i P(\underline{g}^i) P(\underline{h}^i) = \sum_i \sum_{\mu\nu} P_\mu(g^i_\mu) P_\nu(h^i_\nu) \geqslant \sum_{\mu\nu} P_\mu \otimes_\pi P_\nu \Big(\sum_i g^i_\mu \times h^i_\nu\Big) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu+\nu=n} P_\mu \otimes_\pi P_\nu (f_{\mu\nu}) \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} q_n(f_n).$$

Das Infinum über Zerlegungen von $\underline{f} = \sum_i \underline{g}^i \times \underline{h}^i$ ergibt $\hat{p} \geqslant q$.

(ii) Hat p speziell die angegebene Form, so ist $p_\mu \otimes_\pi p_\nu = p_n$ für alle μ, ν mit $\mu + \nu = n$. Die Behauptung folgt dann unmittelbar aus (i) und (5). ∎

Beweis von Satz 6: (i) Die Topologie τ kann durch Normen definiert werden. Ist $p = \bigoplus_n p_n$ eine Norm, so ist auch $\hat{p}$ nach Lemma 5 eine Norm, also gibt es $\mathcal{N}$-stetige Normen und $\underline{\mathcal{G}}[\mathcal{N}]$ ist ein Hausdorffscher Raum.

Da jedes lineare Funktional eine Summe von zwei reellen Funktionalen ist, besagt Satz 5 gerade, daß $\underline{\mathcal{G}}[\mathcal{N}]' = (\underline{\mathcal{G}}^{+1} - \underline{\mathcal{G}}^{+1}) + i(\underline{\mathcal{G}}^{+1} - \underline{\mathcal{G}}^{+1})$.

Die Existenz einer Basis von Normen ν mit $0 \leqslant \underline{f} \leqslant \underline{g} \Rightarrow \nu(\underline{f}) \leqslant \nu(\underline{g})$ folgt aus Satz 4, Prop. 1.5, S. 63 in [12] und der Tatsache, daß es $\mathcal{N}$-stetige Normen gibt. Diese Normen haben die Gestalt

$$\nu(\underline{f}) = \operatorname{Sup}_{T \in \underline{\mathcal{G}}^{+\prime},\ |T| \leqslant \hat{q}} |T(\underline{f})|$$

wobei $\hat{q}$ eine $\mathcal{N}$-Norm ist.

(ii) $\mathcal{N}$ ist echt gröber als τ wegen (5) und Lemma 4. Sei $q(\underline{f}) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(f_n)$ eine τ-stetige Norm auf $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n$. Es gibt τ-stetige Normen $p_{1,n}$ auf $\mathcal{G}_1$ mit

$$q_n \leqslant p_{1,n} \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi p_{1,n}$$

und ein $c \geqslant 1$ mit $q_0(a) \leqslant c\,|a| = c \cdot p_0(a)$.

Sei $p_1 := \operatorname{Max}_{n=1\ldots n} p_{1,n}$, $p_n = p_1 \otimes_\pi \ldots \otimes_\pi p_1$ und $p = \bigoplus_{n=0}^{\infty} p_n$. Es ist $q \leqslant c \cdot p$ auf $\bigoplus_{n=0}^{N} \mathcal{S}_n$. Wegen Lemma 5 (ii) ist aber $p = \hat{p}$, also ist p $\mathcal{N}$-stetig.

(iii) Weil τ feiner als $\mathcal{N}$ ist, gilt auf jeden Fall $\overline{\mathcal{M}}^{\tau} \subset \overline{\mathcal{M}}^{\mathcal{N}}$ (Balken bedeutet Abschluß in der jeweiligen Topologie).
Sei $\underline{f} = (f_0, \ldots f_N) \notin \overline{\mathcal{M}}^{\tau}$. Es gibt also eine τ-Nullumgebung U, so daß $(\underline{f} + U) \cap \mathcal{M} = \emptyset$. Dabei kann U so gewählt werden, daß $Q_N U \subset U$ (Etwa $U = \left\{ \underline{f} \;\middle|\; \sum_n q_n(f_n) \leqslant 1 \right\}$ mit stetigen Normen q_n).
Nach (ii) gibt es eine $\mathcal{N}$-Nullumgebung V mit $Q_N V \subset Q_N U \subset U$.
Angenommen es gibt ein $\underline{g} \in (\underline{f}+V) \cap \mathcal{M}$, dann ist $Q_N \underline{g} \in Q_N((\underline{f}+V) \cap \mathcal{M}) \subset (\underline{f}+U) \cap \mathcal{M}$ wegen $Q_N \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. Dies ist ein Widerspruch zu $(\underline{f}+U) \cap \mathcal{M} = \emptyset$. Also ist auch $(\underline{f}+V) \cap \mathcal{M} = \emptyset$ und $\underline{f} \notin \overline{\mathcal{M}}^{\mathcal{N}}$.

(iv) Jede τ-beschränkte Menge ist $\mathcal{N}$-beschränkt, weil τ feiner als $\mathcal{N}$ ist. Sei $B \subset \underline{\mathcal{S}}$ $\mathcal{N}$-beschränkt, $p_{\{\beta_n\}}$ eine Norm von der in Lemma 5 (ii) angegebenen Form. Zu jeder Folge $\{\beta_n\}$ kann man offenbar $\{\alpha_n\}$ so wählen, daß $\beta_n \leqslant \operatorname{Min}_{\mu+\nu=n} \{\alpha_\mu \cdot \alpha_\nu\}$.
Wegen (7) ist $p_{\{\beta_n\}}(B)$ beschränkt und da $\{\beta_n\}$ beliebig stark ansteigen kann, muß es ein N geben, so daß $p_n(f_n) = 0$ für alle $\underline{f} \in B$ und $n > N$. Da p_n Normen sind, folgt daraus $B \subset Q_N \underline{\mathcal{S}}$.
Auf $Q_N \underline{\mathcal{S}}$ stimmen aber $\mathcal{N}$ und τ nach (ii) überein, also ist B auch τ-beschränkt.

(v) $\underline{\mathcal{S}}[\mathcal{N}]$ ist nuklear als Quotient des nuklearen Raumes $\underline{\mathcal{S}}[\tau] \otimes_\pi \underline{\mathcal{S}}[\tau]$ nach dem abgeschlossenen Unterraum Ker ϕ (Ker ϕ ist abgeschlossen, weil $\mathcal{N}$ eine Hausdorffsche Topologie ist). Da $\mathcal{N}$ echt gröber als τ und $\underline{\mathcal{S}}[\tau]$ bornologisch ist, kann $\underline{\mathcal{S}}[\mathcal{N}]$ aufgrund von (iv) nicht bornologisch sein. $\underline{\mathcal{S}}[\mathcal{N}]$ ist auch nicht tonneliert, denn es gibt τ-Normen der Form $p = \bigoplus_n p_n$, die keine $\mathcal{N}$-Normen sind. Die dazugehörige abgeschlossene Einheitskugel $\overline{U}_p = \left\{ \underline{f} \;\middle|\; p(\underline{f}) \leqslant 1 \right\}$ ist wegen (iii) auch $\mathcal{N}$-abgeschlossen, also eine Tonne in $\underline{\mathcal{S}}[\mathcal{N}]$, aber keine $\mathcal{N}$-Nullumgebung, wenn p nicht $\mathcal{N}$-stetig ist.
Die Vollständigkeit von $\underline{\mathcal{S}}[\mathcal{N}]$ kann auf genau dieselbe Weise wie für direkte Summen bewiesen werden. Um den Beweis in [8] S. 215 übernehmen zu können, braucht man außer der Vollständigkeit von $\mathcal{S}_n$:

1) Für beliebige β_n gibt es eine $\mathcal{N}$-stetige Norm der Form $p = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \beta_n p_n$

2) Es gibt eine Basis von Normen $\hat{p}$ mit $\hat{p}(Q_N \underline{f}) \leq p(\underline{f})$ für alle N.

Beides ist wegen Lemma 5 erfüllt. ▌

Zum Schluß dieses Abschnitts zwei Bemerkungen:

1. Der geordnete Vektorraum $\underline{\mathcal{S}}^{+1} - \underline{\mathcal{S}}^{+1}$ ist kein Vektorverband, d.h. zu $S \in \underline{\mathcal{S}}^{+1} - \underline{\mathcal{S}}^{+1}$ gibt es im allgemeinen kein kleinstes $T \geq 0$ mit $T+S \geq 0$: Sei etwa $S = (0, S_1, 0, \ldots)$, S_1 reell. Nach Satz 6 (ii) und Satz 5 ist $S \in \underline{\mathcal{S}}^{+1} - \underline{\mathcal{S}}^{+1}$, also gibt es ein $T \geq 0$ mit $T+S \geq 0$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $\alpha_\lambda T := (T_0, \lambda T_1, \lambda^2 T_2, \ldots)$. Es ist $\alpha_\lambda T(\underline{f}^* \times \underline{f}) = T(\alpha_\lambda \underline{f}^* \times \alpha_\lambda \underline{f}) \geq 0$, also ist $\frac{1}{\lambda} \alpha_\lambda T \geq 0$ und $\frac{1}{\lambda} \alpha_\lambda T + S = \frac{1}{\lambda} \alpha_\lambda (T+S) \geq 0$. Falls $0 \leq F \leq \frac{1}{\lambda} \alpha_\lambda T$ für alle $\lambda > 0$, so ist $0 \leq F_0 \leq \frac{1}{\lambda} T_0$ für alle $\lambda > 0$, also $F(1) = F_0 = 0$, also $|F(\underline{f})| \leq F(1) \cdot F(\underline{f}^* \times \underline{f}) = 0$, und somit $F = 0$. Deshalb existiert $\operatorname{Sup}\{0, S\}$ nicht.

2. Als Ordnungstopologie bezeichnet man die feinste konvexe Topologie auf $\underline{\mathcal{S}}$ mit der Eigenschaft, daß jedes Ordnungsintervall $[\underline{f}, \underline{g}] = \{\underline{h} \mid \underline{f} \leq \underline{h} \leq \underline{g}\}$ beschränkt ist([12], S. 118). Diese Topologie ist hier gleich der Mackeytopologie τ. (Prop. 1.29, S. 77 und Prop. 1.16, S. 123 in [12].)

5. Fortsetzung von positiven Funktionalen.

Ist $\mathcal{E}$ ein Teilraum von $\underline{\mathcal{S}}$ und T ein lineares Funktional auf $\mathcal{E}$, das auf $\mathcal{E} \cap \underline{\mathcal{S}}^+$ positiv ist, so erhebt sich die Frage, ob T eine Fortsetzung zu einem positiven Funktional auf $\underline{\mathcal{S}}$ hat. Für die Quantenfeldtheorie sind dabei hauptsächlich zwei Fälle von Interesse: $\mathcal{E} = \tilde{\bigoplus_{n=0}} \mathcal{S}_n$ und $\mathcal{E}$ eine Unteralgebra von $\underline{\mathcal{S}}$. Im ersten Fall hat nicht jedes auf $\mathcal{E} \cap \underline{\mathcal{S}}^+$ positive Funktional eine positive Fortsetzung nach $\underline{\mathcal{S}}$: Jedes von Null verschiedene positive Funktional auf $\underline{\mathcal{S}}$ erfüllt $T(1) \neq 0$ wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, während etwa $T = (0,\dots,T_{2N})$ positiv auf $(\bigoplus_{n=0}^{2N} \mathcal{S}_n) \cap \underline{\mathcal{S}}^+$ ist, falls nur T_{2N} auf $\mathcal{S}_{2N} \cap \underline{\mathcal{S}}^+$ positiv ist.

Wir werden hier den zweiten Fall untersuchen und uns dabei auf Untertensoralgebren beschränken, d.h. Algebren der Gestalt

$$\underline{\mathcal{A}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \underbrace{\mathcal{A} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \mathcal{A}}_{n\text{-mal}}$$

wobei $\mathcal{A}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{S}_1$ ist, invariant unter $*$. Wir definieren

$$\underline{\mathcal{A}} = \left\{ \underline{f} = \sum_{i=1}^{\infty} \underline{f}^{i*} \times \underline{f}^{i} \mid \underline{f}^{i} \in \underline{\mathcal{A}} \right\}.$$

Lemma 6: Falls $\sum_{i=1}^{\infty} \underline{f}^{i*} \times \underline{f}^{i} \in \underline{\mathcal{A}}$ mit $\underline{f}^{i} \in \underline{\mathcal{S}}$, so sind alle $\underline{f}^{i} \in \underline{\mathcal{A}}$. Insbesondere gilt

(i) $\underline{\mathcal{A}}^+ = \underline{\mathcal{S}}^+ \cap \underline{\mathcal{A}}$

(ii) $\underline{f}, \underline{g} \in \underline{\mathcal{S}}^+$, $\underline{f} + \underline{g} \in \underline{\mathcal{A}} \Rightarrow \underline{f}, \underline{g} \in \underline{\mathcal{A}}^+$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\mathcal{A}$ abgeschlossen und $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \mathcal{A}$ können durch den orthogonalen Raum $\mathcal{A}^\perp \subset \mathcal{S}_1'$ charakterisiert werden:

$$\mathcal{A} = \{ f \in \mathcal{S}_1 \mid t(f) = 0 \quad \forall t \in \mathcal{A}^\perp \},$$

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \mathcal{A} = \{ f \in \mathcal{S}_n \mid r^\mu \otimes t \otimes s^\nu(f) = 0 \,, \forall t \in \mathcal{A}^\perp, r^\mu \in \mathcal{S}_\mu', s^\nu \in \mathcal{S}_\nu', \mu+\nu+1 =$$

Sei $\underline{f} = \sum_{i=1}^{\infty} \underline{f}^{i*} \times \underline{f}^{i} \in \underline{\mathcal{A}}$. Es ist $\underline{f} \in Q_{2N} \underline{\mathcal{S}}$ für ein N. Wir betrachten die 2N-Komponente $f_{2N} = \sum_i f_N^{i*} \times f_N^{i} \in \mathcal{A}_{2N}$.

Sei $t \in \mathcal{A}^{\perp}$. Dann ist auch $t^* \in \mathcal{A}^{\perp}$ und $(r^{\mu} \otimes t \otimes s^{\nu})^* \otimes (r^{\mu} \otimes t \otimes s^{\nu}) \in \mathcal{A}_{2N}^{\perp}$ für alle $r^{\mu} \in \mathcal{S}_{\mu}'$, $s^{\nu} \in \mathcal{S}_{\nu}'$, $\mu+\nu+1=N$. Also ist

$$0 = (r^{\mu} \otimes t \otimes s^{\nu})^* \otimes (r^{\mu} \otimes t \otimes s^{\nu})\, f_{2N} = \sum_{i=1}^{\infty} |(r^{\mu} \otimes t \otimes s^{\nu})\, f_N^i|^2 \Rightarrow (r^{\mu} \otimes t \otimes s^{\nu})\, f_N^i = 0 \text{ für alle } i \Rightarrow$$

$f_N^i \in \mathcal{A}_N$ für alle i.

Sei nun $n < N$ und es sei für $m \geq n+1$ erwiesen, daß $f_m^i \in \mathcal{A}_m$ für alle i. Es ist

$$\mathcal{A}_{2n} \ni f_{2n} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\lambda+\varkappa=2n} f_{\lambda}^{i*} \times f_{\varkappa}^{i} = \sum_{i=1}^{\infty} f_n^{i*} \times f_n^i + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{\lambda+\varkappa=2n \\ \lambda \geq n+1 \text{ oder } \varkappa \geq n+1}} f_{\lambda}^{i*} \times f_{\varkappa}^{i}$$

Wendet man hierauf $(r^{\mu} \otimes t \otimes s^{\nu})^* \otimes (r^{\mu} \otimes t \otimes s^{\nu}) = s^{\nu *} \otimes t^* \otimes r^{\mu *} \otimes r^{\mu} \otimes t \otimes s^{\nu}$ an mit $t \in \mathcal{A}^{\perp}$, $\mu+\nu+1=n$, so verschwindet dies nach Voraussetzung auf $f_{\lambda}^{i*} \times f_{\varkappa}^{i}$ für alle λ oder $\varkappa \geq n+1$. Es folgt also

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(r^{\mu} \otimes t \otimes s^{\nu}) f_n^i|^2 = 0 \text{ und } f_n^i \in \mathcal{A}_n.$$

Aus diesen Überlegungen folgt $\underline{f}^i \in \underline{\mathcal{A}}$ für alle i. (i) und (ii) sind unmittelbare Folgerungen. ∎

Aus diesem Lemma folgt, daß die positiven Funktionale auf $\underline{\mathcal{A}}^+$ positiv auf $\underline{\mathcal{A}} \cap \underline{\mathcal{S}}^+$ sind.
Für C^*-Algebren gilt der Satz [14] :

Jedes positive Funktional auf einer Unteralgebra mit 1 hat eine positive Fortsetzung auf die ganze Algebra.

Der Beweis beruht auf der Tatsache, daß 1 ein innerer Punkt des Kegels der positiven Elemente ist. Es ist aber leicht zu sehen, daß $\underline{\mathcal{S}}^+$ keine inneren Punkte hat [6] . Ein anderes bequemes hinreichendes Kriterium([12] S. 83) versagt wegen Lemma 6 (ii) und die notwendigen und hinreichenden Kriterien etwa in [12] , [15] oder [6] sind nicht sehr handlich in unserem Fall.

Wir wollen nun zeigen, daß die Frage nach positiven Erweiterungen keine so einfache Antwort hat wie bei C^*-Algebren. Eine andere damit verwandte Frage soll gleichzeitig behandelt werden:
Ist die feinste konvexe Topologie $\mathcal{N}_{\underline{A}}$ auf $\underline{A}$ mit der Eigenschaft, daß m: $\underline{A}[\tau] \times \underline{A}[\tau] \to \underline{A}[\mathcal{N}_{\underline{A}}]$ stetig ist, identisch mit der Einschränkung $\mathcal{N}|\underline{A}$?

Satz 7: Wenn A ein topologisches Komplement in $\mathcal{S}_1$ hat, so hat jedes positive Funktional auf $\underline{A}$ eine Fortsetzung in $\underline{\mathcal{S}}^{+1}$ und es ist $\mathcal{N}_{\underline{A}} = \mathcal{N}|\underline{A}$.

Beweis: Wenn A ein topologisches Komplement hat, so gibt es eine stetige Projektion $\pi_1: \mathcal{S}_1 \to A$. Man kann auch annehmen, daß $\pi_1(f^*) = \overline{\pi_1(f)}^*$, denn $\operatorname{Re}\pi_1 = \frac{\pi_1 + \pi_1^*}{2}$, wo $\pi_1^*(f) := \pi_1(f^*)^*$, ist auch eine stetige Projektion auf A: Wegen $A = A^*$ bildet $\operatorname{Re}\pi_1$ $\mathcal{S}$ auf A ab, und aus $\pi_1|A = \pi_1^*|A = \mathrm{id}$ folgt $\operatorname{Re}\pi_1|A = \mathrm{id}$. Es sei also π_1 eine reelle Projektion auf A. Definiert man $\pi_0 = 1$, $\pi_n = \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_1$, so ist $\pi = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \pi_n$ ein stetiger $*$-Algebrenhomomorphismus $\underline{\mathcal{S}} \to \underline{A}$. Falls T positiv auf $\underline{A}$, so ist $T \circ \pi$ eine positive Fortsetzung nach $\underline{\mathcal{S}}$.
Sei U eine $\mathcal{N}_{\underline{A}}$-Umgebung in $\underline{A}$, dann gibt es nach Definition eine τ-Umgebung V in $\underline{A}$, so daß $m(V \times V) \subset U$. Da π stetig ist, gibt es eine τ-Umgebung W in $\underline{\mathcal{S}}$ mit $\pi W \subset V$. Es ist dann $m(W \times W) \cap \underline{A} = \pi(m(W \times W)) = m(\pi W \times \pi W) \subset m(V \times V) \subset U$, also ist $\mathcal{N}$ feiner als $\mathcal{N}_{\underline{A}}$ auf $\underline{A}$, also sind beide gleich, da $\mathcal{N}$ offenbar gröber ist. ∎

Satz 8: T sei positiv auf $\underline{A}$ und es existiere eine stetige Norm p auf $\mathcal{S}_1$ und Konstanten c_n, so daß $|T_n| \leq c_n \cdot p \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi p$. Dann hat T eine Fortsetzung in $\underline{\mathcal{S}}^{+1}$.

Beweis: Es gibt eine Hilbertsche Norm h, so daß $p \leq h$. Diese Norm definiert eine Topologie auf A, sei $\overline{A}$ die Vervollständigung. Bilde die Tensoralgebra $\underline{\overline{A}} = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \overline{A} \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi \overline{A}$ mit der Topologie einer lokalkonvexen direkten Summe. Da man h so wählen kann, daß $h(f^*) = h(f)$, läßt sich $*$ zu einer stetigen

Involution auf $\underline{\bar{A}}$ erweitern. Auf $\underline{\bar{A}}$ ist die Multiplikation stetig: Sei $h^n = h \otimes_\pi \dots \otimes_\pi h$, $\bigoplus_n c_n h^n$ eine stetige Norm. Es ist

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} c_n h^n (\underline{f} \times \underline{g}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h^n \Big(\sum_{\mu+\nu=n} f_\mu \times g_\nu \Big) \leq \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{\mu+\nu=n} h^\mu(f_\mu) h^\nu(g_\nu) \leq$$

$$\leq \Big(\sum_\mu a_\mu h^\mu(f_\mu) \Big) \cdot \Big(\sum_\nu a_\nu h^\nu(g_\nu) \Big) \quad \text{falls } c_n \leq \operatorname{Min}_{\mu+\nu=n} \{a_\mu \cdot a_\nu\}.$$

Der positive Kegel $\underline{\bar{A}}^+ = \Big\{ \sum_i \underline{f}_i^* \times \underline{f}_i \,\Big|\, \underline{f}_i \in \underline{\bar{A}} \Big\}$ ist deshalb enthalten in dem Abschluß von $\underline{A}^+$ in $\underline{\bar{A}}$. Jedes Funktional T mit $|T_n| \leq c_n \cdot h^n$ definiert ein stetiges Funktional auf $\underline{\bar{A}}$. Wenn T positiv auf $\underline{A}^+$ ist, so auch auf $\underline{\bar{A}}^+$.
Zu der Hilbertschen Norm h gehört ein Projektor $\mathcal{T}_1 : \mathcal{S}_1 \to \bar{A}$. Genau wie in Satz 7 kann man $\mathcal{T}_1(f^*) = \mathcal{T}_1(f)^*$ annehmen und $\mathcal{T}$ definiert einen $*$-Algebrenhomomorphismus $\mathcal{T} : \underline{\mathcal{S}} \to \underline{\bar{A}}$ und eine Fortsetzung $T \circ \mathcal{T}$ von T. ∎
Durch ein Gegenbeispiel soll nun gezeigt werden, daß Satz 7 nicht für beliebige Unterräume A gilt. Wir betrachten der Einfachheit halber Funktionen von einer Variablen und setzen

$$A = \mathcal{S}^\circ := \{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \mid f^{(n)}(0) = 0 \ , \ \forall n \}.$$

Dieser Raum hat kein topologisches Komplement in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$.

Satz 9: Es gibt positive Funktionale auf $\underline{\mathcal{S}}^\circ$, die keine Fortsetzung in $\underline{\mathcal{S}}^{+1} - \underline{\mathcal{S}}^{+1}$ haben. Insbesondere ist $\mathcal{N}_{\underline{\mathcal{S}}^\circ} \neq \mathcal{N} \mid \underline{\mathcal{S}}^\circ$.

Bemerkung: Die positiven Funktionale auf $\underline{\mathcal{S}}^\circ$, die eine positive Fortsetzung nach $\underline{\mathcal{S}}$ haben, sind (stark) dicht in $(\underline{\mathcal{S}}^\circ)^{+1}$: Aus $\underline{\mathcal{S}}^{\circ +} = \underline{\mathcal{S}}^+ \cap \underline{\mathcal{S}}^\circ$ folgt nämlich, daß sie schwach dicht sind und weil sie eine konvexe Menge bilden und $\underline{\mathcal{S}}^\circ$ reflexiv ist, sind sie auch stark dicht. Wenn es aber ein positives Funktional R gibt, das keine Fortsetzung in $\underline{\mathcal{S}}^{+1} - \underline{\mathcal{S}}^{+1}$ hat, so liegen auch die nicht fortsetzbaren Funktionale dicht, denn $T + \varepsilon R$ ist positiv und nicht fortsetzbar für alle fortsetzbaren T und $\varepsilon > 0$.

Beweis von Satz 9: Die Schreibweise vereinfacht sich etwas, wenn wir die Tatsache benutzen, daß $\mathcal{S}$ isomorph zu dem Raum $\mathcal{C}_c^\infty[-1,1]$ der $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen mit kompaktem Träger in dem abgeschlossenen Intervall $[-1,1]$ ist [1o] . Der Isomorphismus ist gegeben durch die Variablentransformation

$$x = (1-t)^{-1} - (1+t)^{-1} \in [-1,1] \quad \text{für } t \in]-\infty,\infty[,$$

die Topologie durch die Hilbertschen Normen

$$h_k(f) = \Big(\sum_{\varkappa=0}^{k} \int_{-1}^{1} |f^{(\varkappa)}(x)|^2 \, dx \Big)^{1/2}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle f,g \rangle_k = \langle f, M_k g \rangle_o, \quad M_k = 1 - \frac{d^2}{dx^2} + \ldots (-1)^k \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} .$$

$\mathcal{S}^o$ ist isomorph zu $\{ f \in \mathcal{C}_c^\infty[-1,1] \mid f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \}$.

Wenn im Folgenden von $f \in \mathcal{S}$ bzw. $\mathcal{S}^o$ die Rede ist, sind stets die entsprechenden Funktionen in $\mathcal{C}_c^\infty[-1,1]$ gemeint.
Im Beweis von Satz 1 wurden Funktionale der folgenden Gestalt betrachtet:

$$T_o = 1$$

$$T_{2n+1} = 0$$

$$T_{2n}(f \otimes g) = C_{2n} \cdot \langle f^*, g \rangle_{k_n}^n ,$$

und es wurde gezeigt, daß $T = (T_o, T_1, \ldots) \in \underline{\mathcal{S}}^{+1}$ falls C_{2n} und k_n hinreichend stark gegen Unendlich streben.
Sei θ die Sprungfunktion: $\theta(t) = 0$ für $t < 0$, $\theta(t) = 1$ für $t \geq 1$.
Weil die Funktionen in $\mathcal{S}^o$ eine Nullstelle unendlicher Ordnung bei 0 haben, definiert θ einen stetigen Algebrenhomomorphismus $\alpha_\theta : \underline{\mathcal{S}}^o \to \underline{\mathcal{S}}^o$:

$$\alpha_\theta f_n(t_1, \ldots, t_n) = \theta(t_1) \cdots \theta(t_n) f_n(t_1, \ldots, t_n).$$

Definiere $R = T \circ \alpha_\theta$.
R ist ein positives stetiges Funktional auf $\underline{\mathcal{S}}^o$. Wir behaupten nun:

Falls die Ordnung k_n von T_n über alle Grenzen wächst, so hat R keine Fortsetzung in $\underline{\mathcal{S}}^{+1} - \underline{\mathcal{S}}^{+1}$.

Zum Beweis betrachten wir zunächst auf $\mathcal{S}^o \hat{\otimes} \mathcal{S}^o$ das lineare Funktional

$$s_k(f \otimes g) = \langle \theta \bar{f}, \theta g \rangle_k = \sum_{\varkappa=0}^{k} \int_{-1}^{1} f^{(\varkappa)}(x) \, \theta(x) \, g^{(\varkappa)}(x) \, dx .$$

s_k ist reell und symmetrisch in f und g. Die Fortsetzungen von s_k nach $\mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{S}$ sind eindeutig bestimmt bis auf Terme mit Träger in $\{0\} \times \mathbb{R}^1 \cup \mathbb{R}^1 \times \{0\}$. Jede symmetrische Fortsetzung hat deshalb die Form

$$s_k(f \otimes g) = \sum_{\varkappa=0}^{K} \int_{-1}^{1} f^{(\varkappa)}(x)\, \theta(x)\, g^{(\varkappa)}(x)\, dx + \sum_{\lambda=0}^{L_K} \{ f^{(\lambda)}_{(0)}\, t^K_\lambda(g) + t^K_\lambda(f)\, g^{(\lambda)}_{(0)} \} \quad (8)$$

mit $t^k_\lambda \in \mathcal{S}'$.

Behauptung: Sei $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$ eine Folge, s_{k_n} wie in (8). Falls es stetige Seminormen q und q_n gibt mit

$$|s_{k_n}(f \otimes g)| \leq q(f)\, q_{k_n}(g) \quad (9)$$

für alle $f, g \in \mathcal{S}$ und alle k_n, so ist $\{k_n\}$ beschränkt.

Beweis: Zu q gibt es eine Hilbertsche Norm $h_M = \left(\sum_{\varkappa=0}^{M} \int |f^{(\varkappa)}(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ mit $q \leq h_M$. Angenommen $\{k_n\}$ ist nicht beschränkt. Dann gibt es ein $k_n = N \geq M + 1$ und es ist

$$|s_N(f \otimes g)| \leq q(f) \cdot q_N(g) \leq h_{N-1}(f) \cdot q_N(g). \quad (10)$$

Partielle Integration in (8) liefert

$$s_N(f \otimes g) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \int f^{(\nu)}(x)\, \theta(x)\, g^{(\nu)}(x)\, dx - \int f^{(N-1)}(x)\, \theta(x)\, g^{(N+1)}(x)\, dx - f^{(N-1)}_{(0)}\, g^{(N)}_{(0)}$$
$$+ \sum_{\lambda=0}^{L} (f^{(\lambda)}_{(0)}\, t_\lambda(g) + t_\lambda(f)\, g^{(\lambda)}(0).$$

Für die beiden ersten Glieder gilt eine Abschätzung der Form (10) (eventuell mit einem anderen q_N). Also muß auch gelten

$$\left| \left(\sum_{\lambda=0}^{L} f^{(\lambda)}_{(0)}\, t_\lambda(g) + t_\lambda(f)\, g^{(\lambda)}_{(0)} \right) - f^{(N-1)}_{(0)}\, g^{(N)}_{(0)} \right| \leq h_{N-1}(f) \cdot \tilde{q}_N(g). \quad (11)$$

Sei $g \in \mathcal{S}^0$ und $f^{(\lambda)}(0) = 0$ mit Ausnahme von $\lambda = N-1$ bzw. $\lambda = N$. In diesem Fall reduziert (11) zu

$$|f^{(N-1)}_{(0)}\, t_{N-1}(g)| \leq h_{N-1}(f) \cdot \tilde{q}_N(g)$$

bzw. (12)

$$|f^{(N)}_{(0)}\, t_N(g)| \leq h_{N-1}(f) \cdot \tilde{q}_N(g).$$

Nun gibt es keine Konstanten C, C', so daß $|f^{(N-1)}(0)| \leqslant C \cdot h_{N-1}(f)$ bzw. $|f^{(N)}(0)| \leqslant C' \cdot h_{N-1}(f)$ für alle f, denn $f^{(N-1)}(0)$ und $f^{(N)}(0)$ können beliebig groß sein während das Integral $h_{N-1}(f) = \left(\sum_{\varkappa=0}^{N-1} \int |f^{(\varkappa)}(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}$ beschränkt bleibt. Deshalb muß $t_{N-1}(g) = t_N(g) = 0$ sein, also haben t_{N-1} und t_N Träger in $\{0\}$.
Sei $g^{(\lambda)}(0) = f^{(\lambda)}(0) = 0$ mit Ausnahme von $\lambda = N-1$ und $\lambda = N$.
Die Summe $\sum_{\lambda=0}^{L} f^{(\lambda)}(0)\, t_\lambda(g) + t_\lambda(f)\, g^{(\lambda)}(0)$ hat dann die Form $\sum_{n,m} a_{mn} f^{(m)}(0)\, g^{(n)}(0)$ mit Konstanten a_{mn}. Wegen der Symmetrie des Ausdrucks in f und g ist $a_{mn} = a_{nm}$. Die Ungleichung (11) besagt nun

$$\left| \sum_{m,n} a_{mn} f^{(m)}(0)\, g^{(n)}(0) - f^{(N-1)}(0)\, g^{(N)}(0) \right| \leqslant h_{N-1}(f) \cdot \tilde{q}_N(g)$$

und dies ist nur möglich, wenn das letzte Glied auf der linken Seite kompensiert wird, also $a_{N-1,N} = 1$. Es ist dann auch $a_{N,N-1} = 1$ und $f^{(N)}(0) \cdot g^{(N-1)}(0)$ kann noch weniger durch $h_{N-1}(f) \cdot \tilde{q}_N(g)$ abgeschätzt werden, also kann (1o) nicht gelten. Es folgt, daß $\{k_n\}$ beschränkt sein muß.

Betrachte nun irgendeine reelle Fortsetzung des Funktionals R. Für $f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{S}^\circ$ fest ist dann das Funktional

$$f \otimes g \mapsto R_{2n}(f \otimes f_2^* \otimes \ldots \otimes f_n^* \otimes f_n \otimes \ldots \otimes f_2 \otimes g)$$

eine Fortsetzung von $\text{const} \cdot \langle \theta \bar{f}, \theta g \rangle_{k^n}$, hat also die Form (8). Falls $R \in \underline{\mathcal{S}}^{+1} - \underline{\mathcal{S}}^{+1}$ so ist R nach Satz 5^n $\mathcal{N}$-stetig und es gibt eine stetige Norm q_1 (unabhängig von n) und stetige Normen q_{2n-1}, so daß

$$|R_{2n}(f \times g_{2n-1})| \leqslant q_1(f) \cdot q_{2n-1}(g_{2n-1}).$$

Es müßte dann auch noch (9) gelten, was aber nicht für alle n geht, weil $\{k_n\}$ unbeschränkt ist. Also ist R nicht $\mathcal{N}$-stetig und hat keine Fortsetzung in $\underline{\mathcal{S}}^{+1} - \underline{\mathcal{S}}^{+1}$. R ist aber auf jeden Fall $\mathcal{N}_{\underline{\mathcal{S}}^\circ}$-stetig, also ist $\mathcal{N}_{\underline{\mathcal{S}}^\circ} \neq \mathcal{N} | \underline{\mathcal{S}}^\circ$. ∎

Herrn Professor Dr. H.-J. Borchers danke ich für die Förderung dieser Arbeit durch zahlreiche Diskussionen und Hinweise.
Herrn Dr. G.C. Hegerfeldt möchte ich ebenfalls für nützliche Gespräche danken.
Dem Deutschen Akademischen Austauschdienst und Vísindasjódur Íslands danke ich für großzügige finanzielle Unterstützung.

Literatur

[1] A. Wightman: Quantum Field Theory in Terms of Vacuum Expectation Values.
Phys. Rev. 101, 860 (1956)

[2] H.-J. Borchers: On the Structure of the Algebra of Field Operators.
Nuovo Cimento 24, 1118-1140 (1962)

[3] H.-J. Borchers: Algebraic Aspects of Wightman Field Theory in: Statistical Mechanics and Field Theory, Lectures given at the 1971 Haifa Summer School, edited by R.N. Sen and C. Weil
Halsted Press, New York
Israel Univ. Press, Jerusalem, London 1972

[4] H.-J. Borchers: On the Algebra of Test Functions, Prépublications de la RCP n° 25, Strasbourg, Mai 1972

[5] W. Wyss: On Wightman's Theory of Quantized Fields, Lectures in Theoretical Physics, University of Colorado, Boulder 1968, New York: Gordon and Breach Science Publ. (1969)

[6] W. Wyss: The Field Algebra and its Positive Linear Functionals, Commun.Math.Phys. 27, 223-234 (1972)

[7] G. Lassner, A. Uhlmann: On Positive Functionals on Algebras of Test Functions for Quantum Fields, Commun.Math.Phys. 7, 152-159 (1968)

[8] G. Köthe: Topologische Lineare Räume, 2. Auflg.
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1966)

[9] A. Pietsch: Nuclear Locally Convex Spaces
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1972)

[10] F. Trèves: Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels
Academic Press, New York-London (1967)

[11] I. Gelfand, N. Wilenkin: Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) Band IV,
VEB Deutscher Verlag d.Wissenschaften Berlin (1964)

[12] A.L. Peressini: Ordered Topological Vector Spaces
Harper & Row, New York, Evanston, London (1967)

[13] R.P. Boas: The Stieltjes moment problem for functions of bounded variation,
Bull Am.Math.Soc. 45, 399-404 (1939)

[14] M.A. Neumark: Normierte Algebren
VEB Deutscher Verlag d. Wissenschaften, Berlin (1959)

[15] O. Hustad: Extension of positive Linear Functionals,
Math.Scand. 11, 63-68 (1962)

Lebenslauf

Am 23. November 1945 wurde ich in Reykjavik, Island geboren. Dort besuchte ich die Grund- und Mittelschule und in den Jahren 1960 - 1964 das Gymnasium.
Nach Ablegung der Reifeprüfung am Gymnasium in Reykjavik begann ich im Herbst 1964 mein Physikstudium an der Universität Göttingen, wo ich im Mai 1967 die Diplom-Vorprüfung absolvierte. Seit 1967 arbeite ich dort an dem Institut für Theoretische Physik unter Anleitung von Herrn Professor H.-J. Borchers. Die Diplomhauptprüfung legte ich im Juni 1969 ab.

Zu meinen Lehrern auf dem Gebiet der Quantenfeldtheorie möchte ich H.-J. Borchers, O. Steinmann, J. Challifour und G.C. Hegerfeldt zählen. Meine Ausbildung verdanke ich ebenfalls G. Lüders, M. Kohler, M. Kneser, W. Maak, H. Rémmert, H. Grauert, R. Hilsch, A. Flammersfeld und E. Meyer.